

## OLIMPIADA DE MATEMATICĂ FAZA LOCALĂ, 24.01.2009

Clasa a VII-a

1. Se consideră numerele  $x = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{119}{120}$  și  $y = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \dots \cdot \frac{120}{121}$ .

**(3p) a)** Calculați produsul  $x \cdot y$ ; **(2p) b)** Demonstrați că  $x < y$ ; **(2p) c)** Demonstrați că  $x < \frac{1}{11}$ .

2. Numerele  $a$ ,  $b$  și  $c$  îndeplinesc condițiile:  $\frac{a}{b+1} = \frac{b}{c+1} = \frac{c}{2}$ .

**(4p) a)** Determinați numerele naturale nenule  $a$ ,  $b$  și  $c$ , știind că  $b$  este media aritmetică dintre  $a$  și  $c$ .

**(3p) b)** Aflați numerele raționale strict pozitive  $a$ ,  $b$  și  $c$ , știind că  $a \cdot b = 21 \cdot c$ . Prof Doina Negrilă

3. Pe semidreptele perpendiculare ( $Ox$  și  $Oy$  se aleg, în ordinea dată dinspre origine, câte trei puncte  $A$ ,  $C$ ,  $E$ , respectiv  $B$ ,  $D$ ,  $F$ . Se notează cu  $M$ ,  $N$ ,  $P$ ,  $Q$ ,  $R$ , respectiv mijloacele segmentelor  $[AB]$ ,  $[BC]$ ,  $[CD]$ ,  $[DE]$ ,  $[EF]$ . Dacă  $AC=CE=2a$  și  $BD=DF=2b$ ,  $a < b$ , atunci:

**(2p) a)** Calculați suma  $MN+NP+PQ+QR$ ;

**(2p) b)** Arătați că  $P$  este mijlocul segmentului  $[MR]$ ;

**(3p) c)** Demonstrați relația  $A_{\triangle ABC} + A_{\triangle DEF} = A_{\triangle BCD} + A_{\triangle CDE}$ . Prof Teodor Mărcuț

4. **(7p)** Se consideră un triunghi dreptunghic cu lungimile laturilor de 6cm, 8cm și 10cm. Distanțele unui punct  $M$ , situat în interiorul triunghiului, la laturile acestuia sunt direct proporționale cu laturile respective. Calculați aceste distanțe. Gazeta Matematică

Clasa a VIII-a

1. Fie  $a, b, c \in (0, \infty)$ ; arătați că: **(3p) a)**  $\frac{4}{a+b} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ ;

**(4p) b)**  $\frac{1}{c(a+b)} + \frac{1}{a(b+c)} + \frac{1}{b(a+c)} \leq \frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} + \sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}} + \sqrt{\frac{a^2+c^2}{2}} \right)$ , știind că  $a \cdot b \cdot c = 1$ .

Prof. Petru Vlad

2. Fie  $a$  și  $b$  numere reale distincte;

**(3p) a)** Arătați că:  $a \cdot b = \frac{(a^2 + b^2) - (a - b)^2}{2}$ ;

**(4p) b)** Știind că  $a(a-b)$  și  $b(b-a)$  sunt numere raționale, demonstrați că  $a \cdot b$  este număr rațional.

Gazeta Matematică

3. Fie triunghiul  $ABC$  cu  $AB=13$  cm,  $BC=14$  cm,  $CA=15$  cm. În punctul  $O$ , mijlocul medianei ( $AD$ ), se ridică perpendiculara  $MO$  pe planul triunghiului  $ABC$ ,  $MO = \frac{2\sqrt{15}}{5}$  cm. Calculați:

**(4p) a)** distanțele de la punctul  $M$  la laturile ( $AC$ ) și ( $BC$ );

**(3p) b)** distanța de la punctul  $O$  la planul ( $AMC$ ). Prof Gheorghe Floarea

4. **(7p)**  $VABC$  este o piramidă triunghiulară în care măsurile unghiurilor diedre formate de planele ( $VAB$ ), ( $VBC$ ), ( $VAC$ ) cu planul ( $ABC$ ) sunt egale cu  $60^\circ$ ,  $45^\circ$ , respectiv  $30^\circ$ . Știind că triunghiul  $ABC$  este isoscel, cu baza  $BC=12$  cm și aria triunghiului  $ABC$  este de  $36\sqrt{2}$  cm<sup>2</sup>, calculați distanța de la  $V$  la planul ( $ABC$ ).